MP2

MATHÉMATIQUES
ANNALES D'ORAL
Volume 2 - Années 2006-2007-2008

Mai-Juin 2009 *Sylvie Massonnet* [1]

1. http://perso.orange.fr/Sylvie.Massonnet

Table des matières

1 INTRODUCTION **3**

2 ANALYSE **4**
2.1 Concours communs polytechniques 4
2.2 CENTRALE 13
2.3 TPE 21
2.4 MINES 26
2.5 DIVERS 30

3 ALGÈBRE **36**
3.1 Concours communs polytechniques 36
3.2 CENTRALE 44
3.3 TPE 50
3.4 MINES 54
3.5 DIVERS 58

4 GÉOMÉTRIE **62**
4.1 CCP 62
4.2 CENTRALE 63
4.3 TPE 64
4.4 MINES 64
4.5 Divers 65

5 QUESTIONS DE COURS **66**

6 CORRIGÉS **67**

1 MP2 ORAL DE MATHÉMATIQUES 2008-2009

Déroulement des épreuves

CCP, CENTRALE, TPE

20 à 30 mn de préparation et 30 mn de passage au tableau. Ces durées peuvent être réduites. Plusieurs exercices portant sur deux sujets (algèbre/analyse) ou (géométrie/analyse) sont abordés. Certains exercices sont donnés en direct au tableau. Fréquentes questions de cours, en rapport ou non avec l'exercice.

Aux CCP, barême souvent détaillé (8+12)

A Centrale, Maple à disposition dans la salle pour l'une des épreuves. Usage : calculs d'intégrales; de dérivées partielles, simulation numérique, diagonalisation, etc

ENSEA

Environ 10 mn de préparation au tableau puis 20 à 30 mn de passage.

INT, ENSAE

Pas de préparation. 30 à 35 mn au tableau.

MINES

1 h d'oral au tableau. Parfois 10 mn de préparation au tableau ou sur feuille.

Les examinateurs

Lire les remarques des fiches d'oral pour mesurer la diversité des attitudes. Il faut savoir s'adapter. Etablir le contact et le dialogue. **Parler** distinctement. Regarder l'examinateur. Organiser les calculs. Présenter les idées. Citer les connaissances mises en oeuvre avec précision. Ne pas se démonter à la moindre question ou remarque. Bannir les mouvements d'humeur. Ne pas jouer la montre.

Il ne s'agit pas tant de résoudre les exercices posés que d' être **actif et réactif** en proposant des idées et en montrant ses connaissances.

Suivre la préparation à l'oral.

- ⋆ **Pour réviser les contenus, méthodes et exercices classiques, et développer les capacités de recherche.**
- ⋆⋆ **Pour travailler sur la forme, le dialogue, l'adaptation à une situation.**

Les exercices d'une même planche sont archivés séparément. Les fiches envoyées par les étudiants des années antérieures vous donnent des exemples de regroupements.

Site: http://perso.orange.fr/Sylvie.Massonnet

Certains corrigés d'exercices du volume 2, les rectificatifs éventuels d'énoncés seront sur le site après la fin des cours.

Le volume 1 (années antérieures à 2006) est sur le site sans corrigés.

2.1 Concours communs polytechniques

CCP 1

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

a- Montrer que si $\alpha \leqslant 0$ la série de terme général u_n diverge

b- Lorsque $\alpha > 0$ étudier la convergence de la série

CCP 2 *8 points. 2 fois*

1- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b f_n(x)dx$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$

2- Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

CCP 3 *2 fois*

1- Enoncer le théorème de dérivabilité de l'intégrale à paramètres.

2- Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

3- Trouver une équation différentielle vérifiée par f et la résoudre.

CCP 4 *8 points. Exercice de cours*

$$f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$$

a. Développement en série entière de f au voisinage de 0.

b. Développement limité de f en 0 à l'ordre 3. Justifier le lien entre DSE et DVL

CCP 5 *8 points*

1- Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

2- Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z+z') = f(z).f(z')$

3- En déduire que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$ et $f(-z) = \frac{1}{f(z)}$

CCP 6 *8 points*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} & \text{sinon} \end{cases}$$

a- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$

b- Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Dire si f est C^1

CCP 7 Pour $X \in \mathbb{R}_+$, $C(X) = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x^2+y^2 < X^2\}$.
$F(X) = \int_0^X e^{-t^2} dt$

a- Montrer que $\int\int_{C(X)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leqslant (F(X))^2 \leqslant \int\int_{C(X\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

b- En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

CCP 8 *8 points*
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$$

CCP 9

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

a- Domaine de définition de Γ

b- Calculer $I_{n,p}(x) = \int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^p dt$

c- Justifier que $(1-\frac{t}{n})^n$ etnd vers e^{-t} et en déduire $\Gamma(x) =$

CCP 10 *12 points*
Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1}$

CCP 11

$$f(x,y) = x^2 y + \ln(1+y^2)$$

1- Vérifier que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas à l'origine

2- Soit $\Gamma = \{(x,y)/\ f(x,y) = 0\}$. Montrer que tout point proche de l'origine est l'intersection de l'axe des abscisses et d'une courbe dont on précisera la tangente à l'origine

3- Combien existe-t-il de fonctions $y \mapsto g(y)$ telles que le graphe de g soi inclus dans Γ ?

4- Déterminer les extrema locaux de f.

CCP 12 *12 points*
On définit f 2π périodique et paire par $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = x^2$.

1- Type de convergence de la série de Fourier?

2- Calcul des coefficients

3- Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

CCP 13 *12 points*
Soit la suite de fonctions $f_n(x) = n^2 x(x-1)^n + \arcsin(x-1)$ définie de [0,2] dans $\mathbb{R}$

a- Domaine de convergence simple?

b- Y-a-t-il convergence uniforme sur $[\alpha,2-\alpha]$? Sur [0,1]?

CCP 14 *12 points*

Soit $f \in C^0([0,T],\mathbb{R})$

a- Montrer que

$$\forall t \in [0,T], \quad \int_0^t f(u)du = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} f(u)du$$

b- Soit g telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^T e^{nu} g(u)du = 0$. Montrer que g est nulle.

CCP 15

12 pts

On note $\ell_1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / \quad \sum |a_n| \text{ converge } \}$

a- Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R. A-t-on $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$?

b- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(2-x)(3-x)}$ A-t-on $(\frac{f^{(n)}(0)}{n!})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$?

c- Soit $\ell_2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / \quad \sum |a_n|^2 \text{ converge } \}$. A-t-on $\ell_1 \subset \ell_2$?

CCP 16

$$(E) \quad xy\prime + 2y = \frac{1}{1+x}$$

1- Trouver les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ qui admettent une limite finie en 0.

2- Trouver les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

Année 2007

CCP 17

Développement en série entière au voisinage de 0 de $f(x) = e^x.\cos x$

CCP 18

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}_+$

a. Montrer qu'il existe a_n tel que $f_n(a_n) = 0$

b. Montrer que $a_n^{n+1} = 2a_n - 1$ et en déduire la limite de a_n

c. Limite et équivalent en $+\infty$ de $2^n a_n^n$

CCP 19

$$(E) \quad xy" + y' + xy = 0$$

a. Montrer l'exitence d'une solution DSE telle que $f(0) = 1$

b. Comparer f avec $g : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)dt$ et en déduire $\int_0^\pi (\cos(t))^{2n}dt$

CCP 20 *12 points* On considère la série de fonctions $\sum \frac{xe^{-nx}}{n^\alpha}$

a. Etudier sa convergence simple

b. Etudier la convergence uniforme selon α
c. Etudier la convergence normale selon α

CCP 21 *2 points* Soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$

$$f(x,t) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$$

a. Montrer que $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dx$$

b. Montrer que F est C^0 sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$
c. Exprimer f en utilisant la fonction $\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} \int_0^t e^{-v^2} dv$

CCP 22 *8 points*

a. Démontrer la formule de Leibniz
b. Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$

CCP 23 *8 points*

a. Montrer que $\forall n,\ \ t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
b. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt$ Calculer la limite de $(u_n)_n$.

CCP 24 *12 points*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt$$

a. Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
b. Montrer que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$
c. Calculer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$
d. En admettant que f est continue en 0 calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

CCP 25

Soit la suite de fonctions $u_n(x) = \left(x \cos(\frac{x}{n})\right)^n$

a. Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ \ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\cos(\frac{x}{n})\right)^n = 1$
b. Etudier la convergence simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $]-1,1]$ et montrer que cette suite ne convege pas uniformément.
c. Montrer que $(u_n)_n$ est décroissanteà partir d'un certain rang.

CCP 26

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$ on pose $I_n = [1 - \frac{1}{n}, 1[$.

a. Soit $p \in \mathbb{R}$. intégrabilité de $x \mapsto \frac{(\ln x)^p}{\sqrt{1+x^2}}$ sur I_n en fonction de p

b. Même question pour $x \mapsto \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{1+x^p}}$

c. Etudier la série de terme général $u_n = \int_{I_n} \frac{|(\ln x|^p}{\sqrt{1+x^2}} dx$

CCP 27 *12 points*

1. Soient f et g continues positives sur $[\alpha, +\infty[$telles que $f(t) \sim_{t\to+\infty} g(t)$
   Montrer que si f est intégrable alors g aussi et

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} g(t)dt$$

2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a > 0$. Montrer que pour n assez grand,
   $\int_n^{+\infty} \frac{1}{at^2+bt+c} dt$ existe. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{d}{n} + \int_n^{+\infty} \frac{1}{at^2+bt+c} dt$

CCP 28

a. Montrer que la convergence normale implique la convergence uniforme

b. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!} z^n$ converge uniformément sur tout disque de rayon $r > 0$

CCP 29

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2}, \text{ avec } |\lambda| < 1$$

a. Trouver une relation entre les coefficients de Fourier $a_n(f)$ de la forme $\alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n = 0$

b. En déduire que f est développable en série de Fourier et préciser le type de convergence.

CCP 30 Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$

1. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
   On suppose qu'il existe $(\alpha_n)_n \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et

$$\forall x \in X, \ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X

2. Est-ce que $(z^n)_n$ converge uniformément sur $D(0,\frac{1}{2}$? Sur $D(0,1)$?

CCP 31 *8 points*

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

a. Etude des extrema par méthode analytique

b. Idem par méthode géométrique

CCP 32 *12 points*

Montrer que $\int_0^1 \ln t.\ln(1-t)dt = 2 - \frac{\pi^2}{6}$. (On pourra utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

CCP 33

Soit u une application de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} L_u & : & C^k(\mathbb{R}) & \to & C^{k-1}(\mathbb{R}) \\ & & y & \mapsto & L_u(y) = y' + uy \end{array}$$

a. Montrer que L_u est linéaire
b. Soit une équation différentielle de la forme

$$y" + a(x)y' + b(x)y$$

Conditions sur a et b pour qu'elle puisse s'écrire $(L_u \circ L_u)(y) = 0$
c. Résoudre

$$y'' + 2\tanh xy' + y = 0$$

Année 2006

CCP 34 *12 points*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante convergeant vers 0.

On définit pour $x \in [0,1]$, $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

Etudier les différents types de convergences de la série de fonctions de terme général u_n.

CCP 35

$$(E)xy" + 3y' - 4x.3y = 0$$

a. Montrer qu'il y a une unique série entière solution telle que $f(0) = 1$.
b. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

CCP 36 *8 points.*

Résoudre sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle suivante:

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

CCP 37 *12 points*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. pour $n \geqslant 1$ on définit

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$$

Etudier la nature de la série de terme général u_n selon α.

CCP 38 *8 points. Exercice de cours*

a. Si $a_n \sim b_n$ est-ce que les séries de terme généraux correspondants ont même nature?
b. Nature de la série de terme général $(1+i).\sqrt{n+2}.\sin(\frac{1}{n^2})$

CCP 39 *12 points*

$$\forall x > 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

a. Etudier la convergence simple puis la convergence normale de $\sum u_n$.
b. Montrer que la somme S est continue puis C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire les variations de S.
c. Trouver une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
d. Trouver un équivalent de S en 0 et en $+\infty$

CCP 40 *Exercice regroupé avec le suivant =12 points*
Soit $\lambda > 0$ et

$$f_n : \{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\lambda^n.x^2} \end{array}$$

a. Discuter la convergence simple (suite ou série :à voir)de fonctions selon λ
b. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

CCP 41

$$g_n(x) = \frac{\ln(1+2^n.x^2)}{2^{n+1}}, \text{ et } G(x) = \sum_{n \geqslant 0} g_n(x)$$

Domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de G?

CCP 42 *8 points. Cours*
Soit une série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$.

a. Montrer que la série converge uniformément sur $B(0,r)$ pour $r < R$.
b. Montrer que la somme est continue sur la boule ouverte $B(0,R)$.

CCP 43 *8 points*

Résoudre $y" - y = \tanh x$

CCP 44

Montrer en utilisant la formule de Stirling que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{2}{\pi}$$

CCP 45 Enoncé faux

$$u_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n(x^2+1)})$$

Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

CCP 46 *12 points*

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.x^n$$

a. Etude de la convergence simple.
b. Montrer que la somme est continue sur le domaine de convergence simple.

CCP 47 *8 points. Cours avec résultats à démontrer*

a. Etude de $\sum z^n$
b. Etude de $\sum e^{-x^2 n}$

CCP 48 *12 points*

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \text{ dx}$$

a. Etablir la convergence de la série de terme général u_n.
b. Calculer sa somme.

CCP 49 *12 points*

Montrer que

$$\int_0^1 exp(-t \ln t) \text{ dt } = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

CCP 50 *12 points*

Soit

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

a. Montrer que $\mathcal{S}$ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
b. Montrer que $\mathcal{S}$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.

c. Montrer que $\mathcal{S}(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$

CCP 51 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$ périodique telle que

$$\forall x \in]0,2\pi[,\ f(x) = (2\pi - x).x \text{ et } f(0) = \pi$$

Etudier la convergence de la série de Fourier de f et calculer cette série.

CCP 52 *12 points*

Soit g impaire, $2\pi-$ périodique telle que

$$\forall x \in [0,\pi[,\ g(x) = x^2 \text{ et } g(\pi) = 0$$

a. Nature de la série de Fourier de g
b. Calcul des coefficients de Fourier.
c. Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ (avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$donné)

CCP 53

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(x) + 1}$$

a. Trouver une relation de récurrence entre les coefficients trigonométriques de f.
b. En déduire leur expression.
c. Résultats de convergence de la série de Fourier de f?

CCP 54 *8 points*

$$(E)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\Phi(\frac{x}{y})$$

a. Montrer que (E) admet des solutions de la forme $z(x,y) = f(\frac{y}{x})$.
b. Donner l'ensemble des solutions de (E).

CCP 55 *8 points*

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ f(0,0) = 0$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.

CCP 56 *8 points*

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

a. Par les méthodes du cours, étudier les maxima locaux de f sur son domaine de définition.
b. Par une méthode géométrique, retrouver les résultats.

CCP 57 *12 points*

Soit f continue (+ hypoth genre f intégrable) sur $\mathbb{R}_+$ et

$$F(x) = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin(xy)}{y})^2 f(y)\ \mathrm{dy}$$

a. Calculer la limite de $\frac{F(x)}{x}$ en $+\infty$

b. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} (\frac{\sin u}{u})^2\ \mathrm{du}\ = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{du}$$

c.

$$G(x) = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t}) e^{-2xt}\ \mathrm{dt}$$

Montrer que G est C^1. Calculer G et $G(0)$.

2.2 CENTRALE

CENTRALE 1

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)}$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sinh(nx))^2}$$

1- Calculer $S_1(10^{-2})$ et $S_1(10^{-3})$ avec Maple à 10^{-3} près

2- calculer les équivalents en 0 de S_1 et de S_2

CENTRALE 2

1- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$ Calcul des extrema de f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2- $g(x,y,z) = x^{\ln(x)} + y^{\ln(y)} + z^{\ln(z)}$ Ensemble de définition et calcul des extrema

3- $x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ Calcul des extrema de f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

CENTRALE 3 *Exercice couplé avec le suivant*

Résoudre

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + \frac{1}{1+x^2} y = 1$$

Indication: poser $x = \tan(t)$

CENTRALE 4 *Exercice couplé avec le précédent*

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x).\ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

CENTRALE 5 *Exercice couplé avec le suivant*

$$xy'' + 2xy' + xy = 0$$

(vérif signe)

1- Trouver les solutions DSE_0

2- Résoudre en posant $y(x) = \varphi(x)\frac{\sin(x)}{x}$

CENTRALE 6 *Exercice couplé avec le précédent*

Etudier la onvergence de la série de terme général $u_n(x) = (\int_0^1 (1-t)^n dt)x^n$

CENTRALE 7

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}} dt$$

1- Existence des a_n

2- nature de la série $\sum a_n x^n$?

3- A-t-on $a_n \backsim a_{n+1}$?

4- Trouver un équivalent de a_n en $+\infty$

CENTRALE 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh^n(x)} dx$

1- Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2- Etudier la convergence de la suite et préciser éventuellement sa limite.

3- Calculer u_2 sous forme de somme de séries

4- a- Calculer u_n pour $n \in [|2; 20|]$ à l'aide de Maple.

b- trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2}

5- $n = 2p$ et $p \geqslant 2$. On pose $Q_p = \prod_{k=2}^{p} \frac{2k-1}{2k-2}$

Calculer $Q_p u_{2p} - Q_{p-1} u_{2p-2}$

6- En déduire que $(Q_p u_{2p})_{p\geqslant 2}$ est convergente

7- Etudier la nature de $\sum u_n$

CENTRALE 9 Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2π - périodique. on pose

$$N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \text{ et } F_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^n f(t+x)f(t)dt$$

1- Limite simple de $(F_n)_n$?

2- Y-a-t-il convergence uniforme?

3- Comparer $N(f)$ et $\|f\|_\infty$?

CENTRALE 10 *Questions indépendantes*

1- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = \ln(n+1)u_{n+1} + \ln(n)u_n$. Que dire du rayon de convergence de $\sum u_n x^n$

2- Soit $(u_n)_n$ suite réelle à tremes strictement positfs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on ose

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}$$

a- Montrer que $\frac{n(n+1)}{2} \leqslant \sqrt{n^2 \alpha_n \sum_{k=1}^{n} u_k}$

b- Montrer que $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} u_k} \leqslant 2(\alpha_n - \alpha_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}})$

c- En déduire que si $\sum \frac{1}{u_k}$ converge alors $\sum \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} u_k}$ converge.

CENTRALE 11 *Avec des questions de cours concernant les sommations des relations de comparaison*
$0 < a < 1$. Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ positives telles que

$$\forall n \geqslant 1, \ \ v_{n+1} = av_n + (1-a)\sqrt{u_n + v_n^2}$$

1- Calculer les premiers termes de la suite v_n dans les cas suivants: $u_n = 1$ $u_n = \frac{1}{n+1}$ $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

2- On suppoqe que la suite $(v_n)_n$ converge. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$?

3- Etudier alors la série de terme général u_n

4- On suppose que la suite $(v_n)_n$ diverge. Que dire de $\sum u_n$?

CENTRALE 12

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(t+1)} dt$$

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, calcul de $f\prime$ limites et équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$

CENTRALE 13

1- $(\mathcal{E})$ $y\prime\prime + \alpha(t)y\prime + \beta(t)y = 0$ avec α et β continues sur un intervalle ouvert I. Monterr que la résolution de $(\mathcal{E})$ revient à celle de $(\mathcal{F})$ $y\prime\prime + q(t)y = 0$

2- Soit p continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et soit

$$(\mathcal{G}) \ \ y\prime\prime + p(t)y = 0$$

Montrer que si y est solution de $(\mathcal{G})$ alors y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$

3-

$$(\mathcal{H}) \ \ y\prime\prime - p(t)y = 0$$

Montrer que y s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. on pourra poser $z = yy\prime\prime - p(t)y^2$

CENTRALE 14

1- $(\mathcal{E})$ $y\prime\prime + \alpha(t)y\prime + \beta(t)y = 0$ avec α de classe C^1 et β continue sur I. CNS sur a et b pour qu'on ait deux solutions y_1 et y_2 tells que y_1 n'est pas la fonction nulle et $\forall x \in I, \ \ y_2(x) = xy_1(x)$

2- Trouver alors la solution générale.

3- Application

(a) $y\prime\prime + \tan(t)y\prime + \frac{1}{4}(2 + 3(\tan(t))^2)y = 0$

(b) $y\prime\prime + 2ty\prime + (t^2+1)y = te^{-\frac{t^2}{2}}$

CENTRALE 15

Soit $(u_n)_n$ telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et

$$\forall n \geqslant 1,\ \ u_{n+1} = u_n + \frac{2u_{n-1}}{n+1}$$

1- La suite converge-t-elle?
2- Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n^2})_{n\geqslant 1}$ converge
3- La suite $(\frac{u_n}{n})_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle?

CENTRALE 16

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \int_0^a (\tan(t))^n dt \text{ avec } a \in]0,\frac{\pi}{2}[$$

1- Limite de u_n selon a
On pose $v_n = u_n x^n$
2- Nature de $\sum v_n$ selon x
3- Expression de $\sum_n v_n$ à l'aide de fonctions usuelles.

CENTRALE 17 Donner trois méthodes différentes pour approcher π en précisant l'erreur pour chacune. On pourra utilisqer des polynômes pour une méthode géométrique.

CENTRALE 18 Soit $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = \int_0^{+\infty} \arctan(tx_n)e^{-t}dt$

1- a- Montrer que la suite est bien définie
b- Calculer avec Maple les cinquante premiers termes de la suite. Faire une conjecture.
2- $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(tx)e^{-t}dt$. Montrer que f est C^3 sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe entre -10 et 10 avec Maple.
3- Etudier la suite $(x_n)_n$
4- On choisit $x_0 > 0$
a- Déterminer un réel α tel que $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha$ converge vers un réel non nul.
b- En déduire un équivalent de x_n

CENTRALE 19 Soit K un compact d'un espace vectoriel normé et $f : K \to K$ continue. Montrer qu'il existe une partie non vide G de K telle que $f(G) = G$

CENTRALE 20 E et F désignent deux evn. Soit K un compact et une application continue

$$\begin{array}{rccc} f: & E\times K & \to & F \\ & (\lambda,x) & \mapsto & y \end{array}$$

1- Soit $y \in F$ et $E_y = \{\lambda \in E/\ \ \exists x \in K;\ \ f(\lambda,x) = y\}$. Montrer que E_y est fermé.
2- On suppose que $\forall \lambda \in E_y$ il existe un unique x tel que $f(\lambda,x) = y$. On définit φ qui à λ associe cet x. Montrer que φ est continue.
3- Si K est seulement fermé qu'en est-il des questions précédentes?

Année 2007

CENTRALE 21 Soit $a \in]0,1[$. Résoudre dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en utilisant le logiciel de calcul formel (Maple)

$$f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt$$

CENTRALE 22 Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum \frac{n^p}{n!}$ converge en utilisant le logiciel de calcul formel (Maple) *Indication: calcul pour* $p = 0,1,2,3,\ldots$

CENTRALE 23 Pour $x > 0$ on définit:

$$I(x) = \int_0^{+\infty} exp(-\sqrt{x}t^2)\cos(\frac{t^3}{3})dt$$

1. Montrer que I est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que
$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} texp(-\sqrt{x}t^2)\sin(\frac{t^3}{3})dt$$
2. Montrer que I est C^2 et solution de
$$y'' - 2\sqrt{x}y' - \frac{1}{2\sqrt{x}}y$$
3. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{u^2}u^{2n}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\prod_{k=0}^{n-1}(k+\frac{1}{2})$$
4. Equivalent de $I(x)$ en $+\infty$ etc....

CENTRALE 24

Déterminer le plus petit λ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n(X), \quad \int_{\mathbb{R}} (P'(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqslant \lambda \int_{\mathbb{R}} (P(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

CENTRALE 25

$$P_n(x) = x^n + x - 1$$

1. Montrer que $P_n(x)$ a une racine > 0 unique. On la note α_n
2. Expliciter les α_n
3. Calculer la limite de la suite $(\alpha_n)_n$. On la note ℓ
4. Trouver un équivalent de $\alpha_n - \ell$

CENTRALE 26

1. Extrema de
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \Re e((x+iy)^{10}) \end{array}$$

2. Soit S un compact de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\sup_S f = \sup_{Fr(S)} f$
3. Généralisation avec $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \Re e((x+iy)^n) \end{array}$$

CENTRALE 27 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ Etudier la série de terme général

$$u_n = S^{S_n} - S_n^S$$

Maple à disposition

Année 2006

CENTRALE 28 On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1}.u_n$. Donner la forme explicite de u_n.

CENTRALE 29 On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0, u_1 et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} - (n+1)u_n$.

a. Calculer u_2 etc jusqu'à u_{10} pour $(u_0,u_1) = (1,-1)$ puis $(u_0,u_1) = (1,-2)$ (maple à disposition)
b. Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

CENTRALE 30 On définit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k}$$

avec $p \geqslant 1$ fixé.

. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. sa limite est notée ℓ (On ne demande pas de la calculer)
b. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ f de classe C^1 et $f(0) = 0$ et

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} f(\frac{1}{n+k})$$

Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite en fonction de ℓ
c. $f(x) = \ln(1+x)$. A l'aide des questions précédentes, calculer ℓ.
d. Trouver f continue et $f(0) = 0$ telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge

CENTRALE 31

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et a et b tels que $a < b$.
Soit

$$N_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sup_{t\in[a,b]} |P(t)| \end{array} \right.$$

a. Montrer que $N_{a,b}$ est une norme sur E .
b. Soit $\varphi_c : \{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \varphi_c(P) = P(c) \end{array}$
Etudier la continuité de φ_c en fonction de a,b et c.
c. Montrer que $N_{a,b}$ et $N_{a',b'}$ sont équivalentes si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$

CENTRALE 32

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sup\limits_{t\in[-1,1]} |P(t)| \end{array} \right.$$

a. Montrer que N est une norme.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note
$$F_n = \{P \in \mathbb{R}[X] / \ deg(P) \leqslant n \text{ et } P \text{ unitaire } \}$$
Montrer qu'il existe $a_n > 0$ tel que $\forall P \in F_n, \ N(P) \geqslant a_n$
c. Montrer que a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

CENTRALE 33

$$f(c) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}} \mathrm{dt}$$

a. Domaine de définition de f?
b. Montrer que f est C^1 sur ce domaine et étudier les variations de f
c. Expression de f à l'aide de fonctions usuelles. (Indication donnée: poser $u = \sqrt{\frac{1+xt}{1-t}}$)
d. f est-elle de classe C^∞?

CENTRALE 34

$$b_p = (-1)^p \frac{(p!)^2}{2^p.(2p+1)!}$$

a. Etablir la convergence de la série de terme général b_p
b. Calculer la somme de cette série (Indication: utiliser $u_n : x \mapsto x^n(1-x)^n$)
c. Utiliser Maple pour calculer une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-50} près.

CENTRALE 35

Soit f continue et $2-\pi$ périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{n^2}} f(x-t) \ \mathrm{dt}$$

a. Montrer que g est développable en série de Fourier.
b. Calculer les coefficients de Fourier de g

CENTRALE 36

On définit la suite $(a_n)_n$ avec $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\cosh t)^n} \ \mathrm{dt}$

a. existence de a_n et limite éventuelle de la suite $(a_n)_n$.
b. Rayon de convergence de la série entière de variable réelle x: $\sum_n a_n x^n$ et expression de sa somme.
c. Trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}. En déduire a_{2n+1} et a_{2n}
d. Calculer $a_n a_{n-1}$ et en déduire un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$

CENTRALE 37

$$a > 0, \ \ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (x+n\pi)^2}$$

a. Montrer que f est définie et paire.

b. Montrer que f est développable en série de Fourier.
c. Calculer avec maple
$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}$ dx
d. En déduire les coefficients de Fourier de f.
e. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

CENTRALE 38

$$I = \int\int_{\Delta} (x^2 - y^2)\cos(xy)\mathrm{dxdy}$$

$$\Delta = \{(x,y)/ \;\; 2a \leqslant x+y \leqslant 4a \;\; xy \geqslant a^2, \;\; x \leqslant y\}$$

Poser $u = x + y$ et $v = xy$ et calculer I par changement de variable.

CENTRALE 39

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \ \mathrm{dt}$$

a. Domaine de définition de f
b. Montrer que f est C^1 et calculer f' sur $\mathbb{R}^*$
c. Existence de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}$ dt
d. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

CENTRALE 40

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x. \ \mathrm{dt}$$

a. Domaine de définition de F?
b. Montrer que F est C^∞
c. Calculer $F(n)$ en fonction de $F(n-2)$, montrer que $nF(n).F(n-1)$ est constant. Equivalent de $F(n)$? equivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
d. Equivalent de $F(x)$ quand x tend vers -1^-?

CENTRALE 41

$C = [0,1]^2$ et $D = C\backslash(1,1)$

$$f : \{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \end{array}$$

a. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur C (?)
b. Existence et valeur du *sup* de f sur C

CENTRALE 42

Soit E un espace préhilbertien réel et N la norme sur E. Soit p un projecteur (continu?) non nul.

a. Montrer que $\ker p$ et Imp sont des parties fermées.
b. Montrer que $N(p) \geqslant 1$
c. Quand a-t-on $N(p) = 1$?

d. Montrer que si la série de fonctions de terme général p_n avec p_n projecteur orthogonal, converge simplement vers p, montrrer que p est un projecteur orthogonal.

e. Trouver une suite de projecteurs orthogonaux p_n non nuls convergeant vers 0

2.3 TPE

TPE 1 Soit Φ : $\begin{array}{ccc} S(\mathbb{C}) & \to & S(\mathbb{C}) \\ (\varepsilon_n)_n & \mapsto & (\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k})_n \end{array}$

a. Que peut-on dire de $\Phi((1))$ puis de $\Phi((-1)^n)$et de $\Phi((j^n))$

b. On suppose que $(\varepsilon_n)_n$ est périodique. Montrer que la suite $\Phi((\varepsilon_n)_n)$ converge si et seulement si la moyenne de la suite $(\varepsilon_n)_n$ est nulle

TPE 2

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t} dt$$

a. Domaine de définition?

b. Continuité? Dérivabilité?

TPE 3 Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^1 t^{xt^y} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1+ny)^{n+1}}$$

TPE 4

$(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & \sqrt{x_n y_n} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y_0 & = & b \\ y_{n+1} & = & \frac{x_n+y_n}{2} \end{array} \right.$$

Montrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ ont la même limite.

TPE 5 $y^2 + (y\prime)^2 + 2y\prime = 0$ Etudier l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ entier.

TPE 6 Résoudre sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

TPE 7 Soit H un hyperplan de E evn. Existe-t-il une norme telle que H soit fermé?

TPE 8 Résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x' & + & y' & - & 3x & - & y & = & t \\ x' & + & y' & - & 4x & - & y & = & e^t \end{array}\right.$$

TPE 9 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(-f(x)) = x$

TPE 10

a. $f,\ 2\pi-$ périodique définie par $f(t) = |t|$ si $t \in [-\pi,\pi]$. Etude de la série de Fourier de f et calcul de $\sum \frac{1}{n^4}$
b. $f(x) = \sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Montrer qu'il n'y a pas CVU en utilisant les SdFourier.

TPE 11

a. Soit $(f_n)_n$ suite d'applications de I dans J et soit g uniformément continue de J dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f. montrer que $(g \circ f_n)_n$ CVU vers $g \circ f$
b. (application de 1 voir aussi feuille d'exos $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$)

TPE 12

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x'(t) & = & x(t) & + & y(t) & - & 3 \\ y'(t) & = & -2x(t) & + & 3y(t) & + & 1 \\ x(0) & = & y(0) & & & & \end{array}\right.$$

a. Justifier l'existence d'une solution
b. Trouver A et B tels que $X' = AX + B$ équivaut au système ci-dessus
c. Résoudre

Année 2007

TPE 13

DSE_0 de $\ln(1 + \frac{x}{1+x^2})$

TPE 14

$$F(x) = (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$$

$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' + G' = 0$
2. Montrer que $F + G = \frac{\pi}{4}$ et en déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

TPE 15

1.

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$$

Domaine de définition de φ et limites aux bornes du domaine

2. Calculer $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$

TPE 16 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Etudier

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{1}{n+kp})$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$

TPE 17 Résoudre

$$f''(x) + f(-x) = x$$

sur $\mathbb{R}$

TPE 18 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et bornée. Montrer que l'équation différentielle

$$y'' - w^2 y = f(x)$$

possède une unique solution bornée.

TPE 19 Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ Chercher les extrema de f

$$y'' - w^2 y = f(x)$$

possède une unique solution bornée.

TPE 20

a. Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$. Soit $a < 0 < b$ Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t} dt = f(0)\ln(\frac{b}{a})$
b. Application: calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$

Année 2006

TPE 21 Existence et valeur de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{1-n^2}$$

TPE 22 Existence et valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{1+t^2}\ \mathrm{dt}$$

TPE 23

Existence et calcul de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{2006} t}\ \mathrm{dt}$$

TPE 24 Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière du groupe spécial linéaire $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ (ens des matrices de déterminant 1).

TPE 25

$$I_x = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\ \mathrm{d}\ \theta$$

a. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles I_x est définie.
b. Calculer I_x al'aide d'une somme de Riemann.
c. Calculer I_1

TPE 26

$$E = \{f \in C^1([0,1])/\ f(0) = 0\}$$

On définit $N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_0(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

On note $E_1 = E$ muni de N_1 et E_0 pour E muni de N_0. On note Id_1 l'identité de E_1 dans E_1 et Id_0 l'identité de E_0 dans E_0.

Etudier la continuité de ces deux applications. *Indication donnée: on pourra utiliser* $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

TPE 27

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$$

a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} K_n = +\infty$
b. Etudier la limite de $K_n - \ln n$. *Indication donné: utiliser* $f_n(t) = \frac{1-(1-t)^n}{t}$

TPE 28

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin x + \sin(3x)}$$

a. Domaine de défintion de f?
b. Primitives de f?

TPE 29

CNS sur α pour que $\sum \frac{xe^{-nx}}{n^\alpha}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

TPE 30

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

a. Domaine de définition, de continuité et caractère C^1 de F?
b. Trouver une équation différentielle vérifiée par F
c. Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$
d. Lien entre F et

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2}\mathrm{du}$$

et calcul de I.

TPE 31

$$f_n(x) = \frac{x(1+\cos^2 x)}{1+n^2x^2}$$

Domaine de convergence simple? Etude de la continuité de la somme et de sa limite en $+\infty$.

TPE 32

$$\begin{array}{rcccc} u_n & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{xe^{-nx}}{\ln n} \end{array}$$

Etudier la convergence normale et la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général u_n.

TPE 33

a. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
b. Soit $A \subset \mathbb{R}$, partie infinie telle que $\forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0/\ \ A \bigcap]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[= \{x\}$.
Montrer que A est dénombrable.

TPE 34

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{t} e^{-t} \mathrm{dt} \end{array}$$

a. Montrer que f est continue et dérivable.
b. Calculer f
c. En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\mathrm{dt}$ et $\int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{dt}$.

TPE 35 Soit la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n^2 E(\frac{1}{u_n})$

a. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
b. Montrer que sa limite est nulle ou bien elle est stationnaire.
c. Déterminer u_0 tel que la limte soit $\frac{1}{2}$

TPE 36 Calculer la limte de $\frac{1}{n}(\frac{(2n)!}{n!})^{\frac{1}{n}}$

TPE 37 Soit E un espace vectoriel normé. Que peut-on dire de l'intérieur d'un sous-espace vcetoriel F de E?

TPE 38 Soit E et F deux evns et f une application de E dans F. On suppose que f est bornée sur la boule unité de E et que :$\forall (x,y) \in E^2,\ \ f(x+y) = f(x)+f(y)$.
Montrer que f est linéaire et continue.

TPE 39 Soit E et F deux evns et u une application linéaire de E dans F. On suppose que $\forall (x_n)_n \in E^n$ si $(x_n)_n$ converge vers 0_E alors $(u(x_n))_n$ est bornée.

1. Montrer que u est continue.
2. Etudier la réciproque

TPE 40 Soit $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

a. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
b. Montrer qu'il y a convergence pour $x = -1$
c. Calculer la limite de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$
d. En déduire la limite de na_n

TPE 41

Résoudre pour $a > 0$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

en choisissant un changement de variables approprié.

TPE 42

$$\mathcal{E} : \dot{x}(t) = x(t)\sin(x(t))$$

Montrer que les solutions maximales sont monotones, bornées et définies sur $\mathbb{R}$.

2.4 MINES

MINES 1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - x^n}{n^2}$$

1. Domaine de définition de f
2. Dérivabilité de f ?
3. Equivalent de f en 1

MINES 2 E est un $\mathbb{R}-$ evn et F un espace de Banach.

$f \in C^0(E,F)$ vérifie

$$\exists M,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, $u_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $L(f)$
2. Montrer que $L(f)$ est linéaire et continue et que $L(f) - f$ est bornée
3. Montrer que $L(f)$ est l'unique application linéaire telle que $\|L(f) - f\| \leqslant M$

MINES 3 *Enoncé incomplet*

Existe-t-il des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ N(PA) = N(AP)$$

MINES 4

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{nx^2})$$

1. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et un équivalent simple de f en $+\infty$

MINES 5

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

1. Rayon de convergence de la série entière.
2. On note f la somme. Montrer que f est solution de
$$(1-x^2)y\prime(x) - xy(x) = 1$$
3. En déduire l'expression explicite de f.

MINES 6 Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$ et $f_n(x) = x^n f(x)$ (je pense qu'on doit supposer que f est C^1
1. Montrer que $(f_n)_n$ et $\sum f_n$ convergent uniformément sur tout $[0,a]$ tel que $0 < a < 1$
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$
3. Montrer que converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $f'(1) = 0$

MINES 7

1. Etude de la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$
2. Rayon de cv de $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}x^n$

MINES 8 $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$
1. f est-elle continue ?
2. Montrer que f est C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$
3. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$

MINES 9

Soit f dérivable en 0 et $f(0) = 0$. Calculer la limite de $\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ quand n tend vers $+\infty$

MINES 10

Soit $a \in]-1,1[$.

$$g : x \mapsto \frac{1 - a\cos(x)}{1 - 2a\cos(x) + a^2}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Déterminer les f telles que f est $2\pi-$ périodique continue et

$$f(x) = \lambda \int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

MINES 11 $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$

MINES 12 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f continue de E dans F.
Montrer que f continue si et seulement si $\forall A \subset E$ on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Anné 2007

MINES 13

1. Soit $(a_i)_{i\in[|1\ldots n|]} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$
   Montrer que
$$(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i)$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\ldots+x^n}dx$$
   Etudier la suite $(u_n)_n$
3. Etudier la série de terme général u_n.

MINES 14

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$$

Montrer que f est C^1 et calculer ses dérivées (partielles)

MINES 15

$$u_n = 1 - \tanh(n\theta) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

a. Nature (?) de la convergence de la série?
b. Equivalent (? de la somme) quand θ tend vers $+\infty$
c. Equivalent (de la somme) quand θ tend vers 0

MINES 16 Etude de la convergence de $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}})$. Etude de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^3}{t^{\frac{3}{2}}}dt$

MINES 17

1. $(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = 0$. Résoudre .
   Indication: poser $z(x) = e^{-x}y(x)$

2. Sur [0,1] on définit $q_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1}(x) = \int_0^x q_n(t - t^2)dt$. Montrer que $\sum_n q_n$ converge normalement

MINES 18

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

a. Domaine de définition
b. Montrer que f est de classe C^1 et

$$f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1}(t^{x-1} - t^{-x})dt$$

c. Signe de f'
d. Limite de f en 0
e. Montrer que $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie

Année 2006

MINES 19

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+x)}}\ \mathrm{dt}$$

MINES 20 Soit $f \in C^1([0,\pi])/\ \ f(0) = f(\pi) = 0$ et $\int_0^\pi (f'(t))^2 \mathrm{dt} = 1$

Montrer qu'il existe $(a_n)_{n \geqslant 1}/\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}$ et $\forall x \in [0,\pi]\ \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nt)$

MINES 21 $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+4} a_n$. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

a. Rayon de convergence
b. f est-elle définie en R ou $-R$? Est-elle continue en ces points?
c. Valeur de $f(R)$?

MINES 22 Soit $z \in \mathbb{C}$ Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(zt)\ \mathrm{dt}$

MINES 23 Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\ \mathrm{dt}\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

MINES 24 Trouver une suite réelle positive non décroissante tendant vers 0

MINES 25

a. Donner le DL de

$$x \ \mapsto\ \frac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} \quad \text{où } \alpha \in]0,\pi[$$

b. En déduire le développement de Fourier de

$$x \mapsto \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos x}$$

MINES 26

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Etudier $u_n = \int_0^1 f(t^n)\ \mathrm{dt}$

MINES 27 Etudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$

MINES 28

Soit f 2π périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\ \ f(x) = \cos(\alpha x)$$

a. Calculer la série de Fourier de f.

b. Montrer que $\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2}$

c. Montrer que
$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{dt}\ = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

MINES 29

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{dt}$$

2.5 DIVERS

Divers 1

ENSIIE

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+$, k lipschitzienne et trouver k. Calculer $S(0)$ et $S(1)$
2. Montrer que S est C^∞
3. Equivalent de S en $+\infty$
4. Représentation graphique de S
5. Mq $S(x) - \ln(x)$ a une limite finie en $+\infty$

Divers 2

Petites Mines

1.

$$I_p = \int_1^e x^2(\ln(x))^p dx$$

Trouver une relation entre I_p et I_{p+1}. Etdudier la cv de $\sum I_p$

2.

$$u_n = \frac{x^n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

Convergence de $\sum u_n$

Divers 3

ENSTIM

$$I_a = \int_0^{+\infty} x \ln(x + e^{ax}) dx$$

Etudier selon les valeurs de a la convergence de I_a

Divers 4

AIR

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos(t)}{t} dt$$

Montrer que f est C^1; trouver une équation différentielle vérifiée par f puis en déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Divers 5

St Cyr

a. Montrer que la série de tg $\frac{1}{n.n!}$ converge. on note S sa somme
b. Soit $I = \int\int_{[0,1]^2} xye^{xy} dxdy$. Exprimer I en fonction de S. Montrer que $S = -\int_0^1 e^x \ln(x) dx$

Divers 6

St Cyr

a. Etudier la cv des séries $u_n = \frac{1}{n} - (1 + \frac{1}{2n}) \ln(1 + \frac{1}{n})$, $v_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n})$.
b. $w_n = \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ Montrer que la suite w_n converge en étudiant $\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n)$

Divers 7

ENSIIE

1. $f(x) = e^{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \cos(\frac{x}{2})$. calculer le DSE de f en 0
2. $f_n(x) == \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$
   a. Montrer que la série de fonctions cv simplement sur $\{x \in \mathbb{R}, \quad -x \notin \mathbb{N}\}$. Sa somme ets notée S.
   b. Montrer que $S(1) = \frac{e-1}{e}$
   c. Montrer que $\phi : x \mapsto xS(x) - S(x+1)$ est constante.
   d. Etudier la continuité de S

Divers 8

INT

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$

a. Domaine de définition

b. Continuité de f
c. Limite de f en $+\infty$

Année 2007

Divers 9

AIR

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$$

Convergence de la série et calcul de la somme.

Divers 10

AIR

$$(E)\ \ x^2y'' + (x^2+x)y' - y = 0$$

a. Trouver les solutions développables en série entière et calculer leur rayon de convergence
b. Exprimer les solutions DSE à l'aide de fonctions usuelles
c. Comment trouver les " autres " solutions.

Divers 11

NAVALE *Exercice posé deux fois par un examinateur difficile*
Soit $(\varepsilon_n)_n \in (\{-1,1\})^{\mathbb{N}}$ et

$$a_n = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0.\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\prod_{i=0}^{n} \varepsilon_i}{2^n}$$

1. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge et tend vers $\ell \in [-2,2]$
2. Montrer que rout réel $a \in [-2,2]$ est limite d'une suite de cette forme.
3.

$$x_n = \varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n\sqrt{2}}}}$$

$$y_n = 2\sin(\frac{\pi}{4}.a_n)$$

Trouver un lien entre x_n et y_n . Etudier la suite $(x_n)_n$.

Divers 12

ENSTIM

1. Montrer que la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge. On note ℓ sa limite. la calculer
2. Quelle est la limite de $n(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ell)$?

Divers 13

INT
$u_n = (\cos(\frac{1}{n})^{n^\alpha}$ nature de la série selon α

Divers 14

INT

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

Etude de la série de fonctions. Continuté? Dérivabilité de la somme?

Divers 15

INT E et F deux ev euclidiens. Soit $f : E \to F$, surjective, telle que $f(0_E) = 0_F$ et

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que f conserve la norme, le produit scalaire, et est linéaire.

Divers 16

INT

DSE de $e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$

Divers 17

INT

Enoncé à vérifier

$f(x,y) = x((\ln x^2) + y^2)$ Etude des extrema locaux et absolus

Divers 18

INT

$P \in \mathbb{R}[X],\ \ P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{\omega_k}$ avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

Montrer que

$$\forall (x,y) \in]a_i,a_{i+1}[^2,\ \ P(\frac{x+y}{2}) \geq (P(x)P(y))^{\frac{1}{2}}$$

Est-ce vrai pour $]a_n, +\infty[$? Pour $]-\infty, a_1[$?

Divers 19

IIE

$$E = \{g \in C^0([0,1],\mathbb{R}),\ \ \int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{e}\}$$

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction affine par morceaux g_n sur [0,1] par $g_n(0) = \lambda_n.n = g_n(\frac{1}{n}$ et $g_n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0 = g_n(1)$ en définissant λ_n de façon que $g_n \in E$. Calculer $\lim_n \int_0^1 e^t g_n(t)dt$
2. Etudier $\inf_{g \in E} \{\int_0^1 e^t |g(t)|dt\}$ (Existence et valeur)

Divers 20

Petites Mines

$$x(x^2 - 1)y' + 2y = x$$

1. Résoudre
2. Structure de l'espace des solutions.

3. Existence de solutions maximales

Divers 21

ENSEA

Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Divers 22

ENSEA

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$$

Divers 23

ENSEA

Soit E un evn complet et soit $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe $k \in]0,\frac{1}{2}[$ vérifiant:

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

1. Montrer que f a au plus un point fixe
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & \in & E \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$
   a. Montrer que $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$
   b. Montrer que $(u_n)_n converge$. On note ℓ sa limite.
   c. Montrer que f possède un unique point fixe

Anne 2006

Divers 24

IIE

Soit $a \in [0,\pi]$. Soit f impaire 2π périodique définie par

$$\forall x \in [0,a],\ \ f(x) = (\pi - a)x,\ \ \forall x \in]a,\pi],\ \ f(x) = (\pi - x)a$$

a. Calculer la série de Fourier de f.
b. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}$
c. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2}$

Divers 25

INT TELECOM

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^n + t + 1}\ \mathrm{dt}$$

Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Divers 26 INT TELECOM

Soit $(a_n)_n$ suite à termes > 0, soit $a > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tels que $\frac{a_n}{a_{n+1}}\varphi(n) - \varphi(n+1) > a$. Montrer que la série de terme général a_n converge.

Divers 27 INT TELECOM

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, de classe C^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f'(x) = f(\frac{1}{x})$

3 ALGÈBRE

3.1 Concours communs polytechniques

CCP 58 Soit E un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension n

a. Montrer que p est un projecteur de E si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur de E
b. Soit p un projecteur. Montrer que $\ker(p) = Im(Id_E - p)$, que $Im(p) = \ker(Id_E - p)$ et que $E = \ker(p) \bigoplus Im(p)$
c. Soit $f \in L_{\mathbb{C}}(E)$.
Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par p

CCP 59 *8 points, 2 fois*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E

a. Montrer que $\forall x \in E$ il existe un unique $y_0 \in F$ tel que $x - y_0 \in F^{\perp}$
b. Montrer que $d(x,F) = \|x - y_0\|$
c. Application: soit $A \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. E est muni du produit scalaire :$\langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)} a_{i,j}b_{i,j}$ Soit F l'ev des matrice triangulaires supérieures.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
Exprimer $d(A,F)$

CCP 60

8 points

Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on définit $\varphi(A,B) = Tr({}^tAB)$ et $\mathcal{F} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

a. Montrer que φ est un produit scalaire
b. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel
c. Trouver une base orthonormale de $\mathcal{F}^{\perp}$
d. Déterminer le projeté orthogonal de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$

CCP 61

8 points

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a. $rg(A)$? A est-elle inversible?
b. A est-elle diagonalisable?

CCP 62 *12 points* E espace euclidien et $f \in L_{\mathbb{R}}(E)$. On suppose que $f^* = -f$

a. Montrer que $\forall x_i nE,\ \langle f(x), x\rangle = 0$. En déduire que $id_E - f$ et $id_E + f \in GL(E)$
b. Montrer que $(id_E - f)^{-1}$ et $id_E + f$ commutent.

c. Montrer que $(id_E - f)^{-1} \circ id_E + f \in SO(E)$

CCP 63

$E = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

a. Montrer que E est sev et sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer $dim(E)$

b. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & E \\ a+ib & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \end{array}$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'ev et d'anneaux.

CCP 64 *12 points*

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ sans valeur propre commune.

a. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible

b. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ (AX = XB \Leftrightarrow X = 0)$

c. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unique / $AX - XB = M$

CCP 65 *12 points*

E euclidien et u endomorphisme de E tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$

1. Montrer que $\ker u = \ker u^*$ et que u et u^* ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres
2. Montrer que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux
3. Soit λ valeur propre de u. Montrer que u et u^* stabilisent $E_\lambda^\perp$
4. Montrer que si u est diagonalisable alors il est orthodiagonalisable

CCP 66 *12 points*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Diagonaliser A
2. $(\mathcal{E})$ $M^2 + M = A$
   a. Montrer que si M est solution de $(\mathcal{E})$ alors M est diagonalisable et ses valeurs propres sont parmi $\{-2,1,2,-3\}$
   b. Résoudre $(\mathcal{E})$

CCP 67 *12 points* Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

1. Montrer que u n'est pas injectif
2. Montrer que $E = \ker u \bigoplus Im(u)$
3. Montrer quie $\ker(u^2 + Id_E) = Im(u)$
4. Montrer que $rg(u) = 2$
5. Montrer qu'il existe une base dans lmaquelle la matrice de u est $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

CCP 68 *8 points*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Sans calcul, dire si M est inversible? Diagonalisables?

b. Valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

c. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) on pose $F = vect(e_1,e_4)$ et $G = vect(e_3,e_2)$. On note f l'endomorphisme représenté par M dans la base canonique. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et la calculer.

CCP 69 *8 points*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

a. Montrer que A est diagonalisables?

b. Trouver P orthogonale et D diagonale telles que $D = {}^t PAP$

CCP 70 *12 points*

On définit pour $k \in [0\ldots,n-1]$, $\omega_k = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $X_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}$

a. Montrer que $\mathcal{B} = (X_0,X_1,\ldots,X_{n-1})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

b.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_2 & \ldots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de A

CCP 71 *12 points*

1. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$AX = \lambda X, \quad {}^tBY = \mu Y$$

Calculer pour $C = X{}^tY$, $AC + CB$

2. Application

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Résoudre $AM + MB = M\prime$ avec M application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
La solution passant par A à $t = 0$ passe-t-elle aussi par B?

CCP 72 *12 points*

Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension finie) et f et g dans $L(E)$ telles u'il existe α vérifiant

$$g \circ f - f \circ g = \alpha f$$

1. Exprimer $g \circ f^k - f^k \circ g$ en fonction de α,k et f
2. Montrer que f est nilpotent. (*Indication:* utiliser

$$\Phi : \begin{array}{ccc} L(E) & \to & L(E) \\ h & \mapsto & g \circ h - h \circ g \end{array}$$

CCP 73 *8 points*

$$n \geqslant 1, \;\; P(X) = X^{2n} - 2X^n \cos(na) + 1$$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$

Année 2007

CCP 74

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer A^n

CCP 75 Soit E un ev de dimension finie et f un endomorphisme de E

a. Montrer que $E = Imf + \ker f \Rightarrow Imf = Imf^2$
b. Montrer que $Imf = Imf^2 \Rightarrow \ker f = \ker f^2$
c. Etude des réciproques

CCP 76 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a. Soit $(A,B) \in E^2$ Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$
b. Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Montrer que toutes les matrices qui représentent u ont la même trace
c. Soit $(A,B) \in E^2$. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}, \;\; Tr((AB)^k) = Tr((BA)^k)$.
d. En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

CCP 77 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans le base canonique

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable
b. Trigonaliser u
c. Résoudre le système

$$\begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

CCP 78

$$a \in \mathbb{R} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

a. Rang (A)? Pour quelles valeurs de a , A est-elle inversible?

b. Pour quelles valeurs de a, A est-elle diagonalisable?

CCP 79

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Montrer que M n'est pas inversible. Montrer qu'elle est diagonalisable sans calculs

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres et vecteurs propres de A et de B

c. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M. Déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Diagonaliser M.

CCP 80

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de A (par récurrence)

CCP 81 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit A la matrice de terme général $a_{i,j} = a$

a. Dire sans calcul si A est inversible? Diagonalisable?

b. Calculer A^n? Calculer le polynôme caractéristique de A

c. Trouver deux polynômes annulateurs de A

CCP 82

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$B = \begin{bmatrix} A & 4A \\ A & A \end{bmatrix}$$

a. Etude de $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. Montrer que B est semblable à $\begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$

c. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable

CCP 83 Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sev

a. Montrer que $E = F \bigoplus F^{\perp}$
b. Montrer que $(F^{\perp})^{\perp} = F$

CCP 84 *8 points*

Soit E un ev euclidien (dimension finie) et F, G DEUX sev

a. Montrer que $(F \bigcap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$
b. Montrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \bigcap G^{\perp}$

CCP 85 *8 points*

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 , $e = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. On pose $q(v) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 4xz - 2yz$

a. Matrice A de q dans e
b. Calcul du polynôme caractéristique
c. Trouver e' base de E telle que , les coordonnées d ev étant notées (X,Y,Z) on ait $q(v) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$

CCP 86 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$

a. Montrer que $\forall (A,B),\ \|A.B\| \leqslant n\|A\|\|B\|$ puis que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall A,\ \|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$
b. Montrer que $\sum \frac{A^p}{p!}$ converge absolument puis converge

CCP 87

8 points

$$\langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

a. Montrer que c'est un produit scalaire (*Fonctions continues* 2π *périodiques*
b. Soit F engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer les projeté orthogonal de $u :\mapsto \sin x$ et de $v : x \mapsto \sin(2x)$ sur F

CCP 88 *8 points*

a. Soit h positive continue sur $[a,b]$. Montrer que si $\int_a^b h(t)dt = 0$ alors h est la fonction nulle.
b. Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Montrer que c'est un produit scalaire sur E
c. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

CCP 89 Soit E euclidien et u un endomorphisme antisymétrique de E c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x)/y \rangle = -\langle x/u(y) \rangle$$

a. Montrer que u a une seule valeur propre réelle et la préciser
b. u est-il diagonalisable? Montrer que $u \circ u$ est symétrique
c. On choisit une base $\mathcal{B}$ de E et on note A la matrice de u. Montrer que les valeurs propres complexes non nulles de A sont imaginaires pures

CCP 90

12 points

Soient $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ deux vecteurs colonnes indépendants. On définit $M = (a_i b_j + a_j b_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

a. Exprimer M en fonction de A et B. Exprimer pour X vecteur colonne, MX en utilisant le produit scalaire canon ique

b. En déduire les éléments propres de M

c. On suppose que A et B sont orthogonaux. Eléments propres de $P = (a_i a_j + b_i b_j)_{i,j}$

CCP 91 A est l'ensemble des endomorphismes d'un espace euclidien tels que $f^* \circ f \circ f^* = f^*$

a. Montrer que $f \in A$ si et seulement si $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal

b. Montrer que $O(E) = A \bigcap det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et en déduire que $O(E)$ est un ouvert relatif de A

Année 2006

CCP 92 *12 points*

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe deux réels distincts λ et μ ainsi que $(A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ distinctes et non nulles tels que:

$$\begin{cases} I_p &= A &+ &B \\ M &= \lambda A &+ &\mu B \\ M^2 &= \lambda^2 A &+ &\mu^2 B \end{cases}$$

1. Calculer $(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p)$. En déduire que M est diagonalisable.
2. Montrer que A et B sont des projecteurs.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ M^n = \lambda^n A + \mu^n B$.
4. Quel est le spectre de M?

CCP 93 *12 points*

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto e^x$.

On pose $(f/g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{dt}$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur E.
2. Trouver deux réels a et b tels que la distance de $x \mapsto e^x$ à $x \mapsto ax + b$ soit minimale

CCP 94 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Noyau de f?

b. Montrer que f n'est pas surjective

c. Donner une base de $\ker f$ et une base de Imf

CCP 95 *8 points. Posé deux fois.*

E désigne un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormale, u un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Montrre que u est un automorphisme orthogonal si et seulement si ${}^tA.A = I_n$ si et seulement si A est inversible d'inverse ${}^tA$.

CCP 96 *8 points.*

a. $(E,\langle|\rangle)$ désigne un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On suppose que $\forall(x,y) \in E^2,\ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\rangle$.
Montrer que u est bijectif.

b. Montrer que l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E muni de la loi $\circ$ est un groupe

CCP 97 $E = \mathbb{R}^3$. Soit $u \in E/\ \ \|u\| = 1$ et soit $D = vect(u)$. On fixe $a \in \mathbb{R}^*$ et on définit $f_a(x) = x + a\langle x|u\rangle u$.

1. Montrer que f_a est un endomorphisme.

2 a. existence et unicité de a' etl que

$$\forall x \in E,\ \ \|x\| = \|f_{a'}(x)\|$$

2 b. Montrer que $E = \ker(f_{a'} + Id_E) \oplus \ker(f_{a'} - Id_E)$. Que peut-on dire de $f_{a'}$?

3 a. Soit a quelconque non nul. Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique.

3 b. Donner les éléments propres de f_a.

CCP 98 $E = \mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel (Base $(1,i)$). Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

a. Montrer qu'il existe α et β tels que $\forall z \in E,\ \ f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$

b. Condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que f soit inversible?

c. Condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que f soit autoadjoint?

CCP 99 $f(P) = P - P'$. Antécédent P de Q fixé?

CCP 100 *8 points. Cours. Plusieurs fois*

Démontrer:

a. h continue positive sur $[a,b]$ d'intégrale nulle implique h nulle.

b. Sur $C^0([a,b])$, $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{dt}$ est un produit scalaire.

CCP 101

$$E = \{M/\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/\ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to E$ telle que $\varphi(a+ib) = M(a,b)$. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Est-ce un isomorphisme d'anneaux?

CCP 102 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note P_A le polynôme caractéristique de A et M_A son polynôme minimal.

a. Montrer que $\forall \lambda \notin Spec(A),\ Tr(\lambda I_n - A)^{-1} = \frac{P'_A(\lambda)}{P_A(\lambda)}$

b. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire Q tel que $\forall \lambda \notin Spec(A),\ (\lambda I_n - A)^{-1} = \frac{Q(A)}{m_A(\lambda)}$

CCP 103 Résolution de $M^2 = A$ avec A matrice 3×3 ayant deux vp .

CCP 104

Très classique

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur.
2. Soit p un projecteur.

   a. Montrer que $\ker(p) = Im(Id_E - p)$ et que $\ker(Id_E - p) = Im(p)$

   b. Montrer que $E = \ker(p) \bigoplus Im(p)$
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. montrer que $p \circ f = f \circ p \Leftrightarrow \ker(p)$ et $IM(p)$ sont stables par f.

3.2 CENTRALE

CENTRALE 43 *Apparu deux fois*

Soit E un $\mathbb{K}-$ ev de dimension finie n et $(f,g) \in (L(E))^2$.

1. Montrer que $n = dim(\ker f) + rg(f)$
2. Montrer que $rg(f) + rg(g) - n \leqslant rg(f \circ g) \leqslant inf(rg(f),rg(g))$
3. Montrer que $rg(f^n) = rg(f^{n+1})$
4. Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n-1,\ 2rg(f^k) \leqslant rg(f^{k+1} + rg(f^{k-1})$

CENTRALE 44 Soit E un $\mathbb{K}-$ ev de dimension finie n et p un projecteur de E.

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & L(E) & \to & L(E) \\ & & f & \mapsto & p \circ f + f \circ p \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme. Déterminer son noyau; en déduire son rang.
2. Calculer les valeurs propres de Φ. Est-ce que Φ est diagonalisable? Quel est son polynôme minimal? Pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer le polynôme minimal P tel que $\Phi^k = P(\Phi)$
3. Application $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   Vérifier que A est la matrice d'un projecteur p. Sous-espaces propres de p, puis de ϕ .

CENTRALE 45 Soit E un $\mathbb{K}-$ ev de dimension finie n.

f endomorphisme de E est cyclique si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $(x,f(x),f^2(x),\ldots,f^{n-1}(x))$ est libre.

1. Dans le cas où f est nilpotent d'ordre n prouver que f est cyclique et préciser quels sont les x tels que $(x,f(x),f^2(x),\ldots,f^{n-1}(x))$ est libre.
2. Un endomorphisme qui a n valeurs propres distinctes est-il cyclique?

3. Même question avec un endomorphisme qui a n valeurs propres dont deux au moins sont égales
4. Application à une dizaine de matrices 3×3 *(j'imagine avec Maple)*

CENTRALE 46

Exercice apparu aussi en 2007

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$

a. On suppose qu'il existe (x,y) tels que x est vecteur propre de u associé à λ et y vecteur propre associé à μ. et que $\lambda\mu \leqslant 0$.

   Montrer qu'il existe z non nul $z \in [x,y]$ tel que $u(z) \perp z$

b. On suppose que $Tr(u) = 0$. Montrer en traitant d'abord le cas où u est autoadjoint que'il existe z de norme 1 tel que $u(z) \perp z$.

c. Montrer que $Tr(u) = 0$ si et seulement si il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

CENTRALE 47 Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on considère l'équation

$$(\mathcal{E}_n) : \quad M^2 - tr(M).M + det(M).I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

1. Résoudre $(\mathcal{E}_2)$
2. Résoudre $(\mathcal{E}_3)$
3. Résoudre $(\mathcal{E}_n)$ pour $n \geqslant 4$

CENTRALE 48 Soit $(a_0,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de polynômes unitaires telle que $\forall i \neq j, \;\; P_i(a_j) = 0$
2. Montrer que $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Caractériser les polynômes de degré n unitaires Q de racines $b_1,\ldots,b_n$ telles que $a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < a_{n-1} < b_n < a_n$
4. Soit R de degré n à coefficients entiers et m tel que $\forall k \in [|0;n|]$, m divise $R(k)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \;\; m$ divise $R(k)$

CENTRALE 49 Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$

1. Montrer l'équivalence de
   (i) $\exists v \in L_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$
   (ii) $E = \ker u \bigoplus Im(u)$
2. Trouver deux conditions équivalentes aux précédentes portant sur les noyaux et images de u et u^2
3. Quels sont les résultats qui subsistent en dimension infinie?

CENTRALE 50 $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canoniquee. Pour u endomorphisme de E on définit $|||u||| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{x}$

1. Montrer que $|||u||| = \sup\{\langle u(x)/y\rangle, \quad (x,y) \in E^2, \;\; \|x\| \leqslant 1, \;\; \|y\| \leqslant 1\}$
2. En déduire que $|||u||| = |||u^*|||$
3. Montrer que $\ker(Id - u) = (Im(Id - u^*))^{\perp}$
4. Déterminer $(\ker(Id - u))^{\perp}$

CENTRALE 51 Soit E un $\mathbb{C}-$ ev de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ un sous ev de $L(E)$ non réduit à $\{0_{L(E)}\}$ stable par composition et tel que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tout élément de $\mathcal{A}$ soient E et $\{0_E\}$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{A}$ contient un projecteur de rang 1.

1. Soit $x \in E\backslash\{0_E\}$, $\mathcal{A}_x = \{a(x)/\ \ a \in \mathcal{A}\}$ Montrer que $\mathcal{A}_x \neq \{0_E\}$ puis que $\mathcal{A}_x = E$
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0_{\mathcal{A}}$ de rang minimal $r \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{A}$ tel que $\ker a \subsetneq \ker f$. Montrer que $f = 0_{L(E)}$
3. Soit $u \in E$ tel que $a(u) \neq 0_E$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $g \circ a(u) = u$
4. Soit $p = g \circ a$. Montrer que p est un projecteur de rang r
5. Montrer que pour $f \in \mathcal{A}$ il existe λ_f valeur propre de $p \circ f_{/Im(p)}$. En déduire que $p \circ f \circ p = \lambda_f p$
6. Montrer que $\mathcal{A}_u \subset \ker(p) + vect(u)$ et conclure.

CENTRALE 52 Soit $E = \mathbb{C}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u possède un supplémentaire stable.
2. Est-ce vrai si $E = \mathbb{R}^n$?
3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ker(u - \lambda Id_E) = \ker(u - \lambda Id_E)^2$
4. Est-ce vrai si $E = \mathbb{R}^n$?

CENTRALE 53 $(p,q,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ avec $p + q + r = 1$

$$M = \begin{bmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{bmatrix}$$

1. A quelle condition M a-t-elle 3 valeurs propres réelles?
2. A quelle condition M a-t-elle 1 valeurs propres réelles?
3. Dans ce cas quelle est la projection sur cet espace parallèlement aux autres esp propres (??)

CENTRALE 54 Soit E un espace euclidien. Soit $t \in O(E)$. on pose $s = t - id_E$

1. Montrer que $\ker s$ et $Im(s)$ sont en somme directe.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k$. Convergence et limite de la suite $(t_n)_n$

CENTRALE 55

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & & & & 2 \\ 3 & & (0) & & 3 \\ 2 & & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   Diagonaliser A et polynôme minimal de A (avec Maple)
2. Soit $A_n \in \mathcal{M}_{2n-1}(\mathbb{C})$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n-1} & & & & & & a_{n-1} \\ a_n & & & (0) & & & a_n \\ a_{n-1} & & & & & & a_{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

Etudier la diagonalisation de A_n

CENTRALE 56

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. a. Avec Maple, χ_A et χ_B
   b. A (resp B) est-elle diagonalisable?
2. a. Avec Maple chercher les P telles que $AP = PB$
   b. Chercher les P inversibles telles que $P^{-1}AP = B$

Année 2007

CENTRALE 57

Soit F une $\mathbb{R}$ algèbre intègre commutative de dimension finie.

1. Soit $x_0 \in F \setminus \mathbb{R}$. Montrer que (1,$x_0$) est libre et que (1,$x_0$,$x_0^2$) est liée.
2. a. Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x_0$ tel que $y_0^2 = -1$
   b. Montrer que
   $$\begin{array}{rccc} \theta & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} + \mathbb{R}x_0 \\ & & a + ib & \mapsto & a + by_0 \end{array}$$
   est un isomorphisme d'algèbres.
3. a. On suppose $F \neq \mathbb{R} + \mathbb{R}y_0$. Soit $z_0 \in F \setminus \mathbb{R} + \mathbb{R}y_0$. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}z_0$ tel que $t_0^2 = -1$
   b. Montrer que $\mathbb{R} + \mathbb{R}z_0 = \mathbb{R} + \mathbb{R}y_0$
4. Conclure

CENTRALE 58 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose

$$B_n(P) = \sum_{k=0} n\mathcal{C}_n^k P(\frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Calcul de $B(1)$,$B(X)$,$B(X^2)$
2. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ B_n(XP) = XB_n(P) + X(1-X)(B_n(P))'$. En déduire que $deg(B_n(P) \leq deg(P)$
3. $$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & B_n(P) \end{array}$$
   Montrer que ϕ est un endomorphisme diagonalisable. On note $\lambda_{n,0} > \ldots > \lambda_{n,4}$ les valeurs propres et $P_{n,0}, \ldots, P_{n,4}$ les vecteurs propres associés choisis uunitaires.
4. Montrer que $\forall k,\ (\lambda_{n,k})_n$ converge.
5. Montrer que $\forall k,\ (P_{n,k})_n$ converge uniformément

CENTRALE 59

$n \in \mathbb{N}^*$. Soit G_n le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ engendré par les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = I_n$

1. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, en étudiant $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix}$ pour un μ correctemet choisi, montrer que $\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in G_2$
2. En remarquant que $\forall L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ montrer que $\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \in G_{n+1}$
3. Montrer que $G_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) /\ \ det(A) =^+_- 1\}$

CENTRALE 60 Soit $g \in GL_2(\mathbb{C})$. On note $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. Soit $u_g : P \longmapsto (cX+d)^{n-1} P(\frac{aX+b}{cX+d})$ Montrer que u_g est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$
2. Montrer que
$$\forall (g_1,g_2) \in GL_2(\mathbb{C})^2, \ \ u_{g_2 g_1} = u_{g_1} \circ u_{g_2}$$
3. Exprimer $det(u_g)$ en fonction de $det(g)$
4. Déterminer les valeurs propres de u_g

CENTRALE 61

Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable et possède trois valeurs propres $\alpha < \beta < \gamma$
2. Montrer qu'il existe trois matrices U,V et W telles que $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \ A^n = \alpha^n U + \beta^n V + \gamma^n W$

CENTRALE 62 Soit $(G,\cdot)$ un groupe. H et K deux sous-groupes de G et $HK = \{x \in G / \ \ \exists (h,k) \in H \times K \quad x = h \cdot k\}$
Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$

CENTRALE 63 Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Montrer que $\mathcal{H} \bigcap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

Année 2006

CENTRALE 64

1. Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle positive. Montrer que $Tr(OS) \leqslant Tr(S)$.

   Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $OS = S$.
2. Calculer la distance de S à$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

CENTRALE 65 Trouver $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

(1). $M^5 = M^2$
(2). $Tr(M) = n$

CENTRALE 66 On fixe $(p,q) \in]0,1[, \ \ p+q=1$. $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et u est l'endomorphisme de E défini par $u(f) : x \mapsto f(px+q)$

1. Etudier les suites $(u_n)_n$ telles que $u_{n+1} = p.u_n + q$
2. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $]-1,1] \backslash \{0\}$
3. Soit f un vecteur propre pour u. Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $f^{(k)} = 0_E$
4. Quelle est la forme des vecteurs propres de u?

CENTRALE 67

a. Soient A et H deux matrices 2×2 symétriques réelles positives. On suppose de plus que A est définie.A-t-on $AH + HA$ positive?

b. Soient A et H deux matrices $n \times n$ symétriques réelles. On suppose de plus que A est positive et définie et que $AH + HA$ est positive. Montrer que H est positive.

CENTRALE 68 Soit T application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$définie par

$$T(P) = (8+3X)P(X) - (5X - X^2)P'(X) + (X^2 - X^3)P"(X)$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité de T.
calcul des vecteurs et valeurs propres de T

CENTRALE 69 *Enoncé à revoir*

Soit E un espace vectoriel sur un corps infini $\mathbb{K}$. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(E)$ et $\forall (f_1,f_2) \in \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2,\ \ f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

1. Soient $(f_1,f_2) \in \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \ f_1(x) = \lambda x$ et $f_2(x) = \mu x$.

   Montrer que $\ker(f_1 - \lambda Id_E) + \ker(f_2 - \mu Id_E) = E$
2. montrer que s'il existe $f_1 \in \mathcal{L}_1$ tel que f_1 ait un sous-espace propre de dimension 1 alors $\mathcal{L}_2$ est constitué d'homothéties.

CENTRALE 70

1. V et WW désignent deux sev de $\mathbb{R}^n$.
   On suppose que $dim(V) + dim(W) \geqslant n+1$. Montrer que $dim(V \bigcap W) \geqslant 1$.
2. Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n. ($S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$). $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ sont ses valeurs propres.

   On note

   $$S = \begin{bmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{bmatrix}$$

   avec $A \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ les vp de A.
   besoin de vp distinctes pour S et A ? ou bien interpréter la notation entermes de dimension des sep?

   a. Soit $X \in \sum_{i=1}^{k} \ker(A - \mu_i I_{n-1}$ et soit $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que

   $${}^t\widetilde{X} S \widetilde{X} \leqslant \|\widetilde{X}\|^2$$

   b. $Y \in \sum_{i=k}^{n} \ker(S - \lambda_i I_{n-1}$. Montrer que

   $${}^tYSY \geqslant \|Y\|^2$$

   . En déduire que $\lambda_k \leqslant \mu_k$.

   c. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$
3. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Trouver (α,β,γ) tels que l'intersection du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ et de la quadrique $q(x,y,z) = 0$ soit une parabole.

CENTRALE 71 Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et $a \in A,\ \ a = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$

a. Montrer que $\frac{1}{q} \in A$

b. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I \bigcap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. En déduire que $I = nA$

c. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et
$\mathbb{Z}_p = \{\frac{a}{b} / \ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et p ne divise pas $b\}$. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que x ou x^{-1} appartient à $\mathbb{Z}_p$.

d. Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ différent de $\mathbb{Q}$ tel que $\forall x \in \mathbb{Q}, \ \ x$ ou $x^{-1} \in A$. Soit I l'ensemble des éléments non inversibles de A. Montrer que c'est un idéal de A et que tout idéal de A différent de A est inclus dans I. (?) En déduire qu'il existe p tel que $A = \mathbb{Z}_p$. (plutôt: A est une intersection de certains $\mathbb{Z}_p$)

CENTRALE 72

a. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] / \ \ P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}\}$

b. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] / \ \ P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Q}\}$

CENTRALE 73

a. Soit G un groupe multiplicatif tel que $\forall g \in G, \ \ g^2 = e_G$ avec e_G neutre pour la loi * de G.

Montrer que G est commutatif.

b. Soit E un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in E, \ \ A^2 = I_n$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in E, \ \ P^{-1}AP$ soit diagonale.

Que peut-on dire de l'ordre de E (ordre=cardinal)

c. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

CENTRALE 74 $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $p \in]-1,1[\backslash\{0\}$, $q = 1 - p$
Soit $u : E \to E \ \ f \mapsto u(f)$ avec $u(f) : x \mapsto f(px + q)$

a. Montrer que u est un automorphisme

b. Montrer que si λ est valeur propre de u alors $-1 < \lambda \leqslant 1$

c. Montrer que si f est un vecteur propre de u alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$

d. Quels sont les vecteurs propres de u?

CENTRALE 75

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ si k est impair alors

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \ \ k^{2^{a-1}} \equiv 1_{[2^a]}$$

b. Montrer que n divise $\sum_{k=1}^{n-1} k^n$ si et seulement si n est impair.

3.3 TPE

TPE 43 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{bmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}$ CNS sur A pour avoir M diagonalisable?

TPE 44 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & AM \end{array}$

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

TPE 45

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ces matrices sont-elles semblables ?

TPE 46 a et b deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Résoudre

$$a \wedge x = b$$

TPE 47 E ev euclidien. Déterminer les endomorphismes f de E tels que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ f(x \wedge x) = f(x) \wedge f(y)$$

TPE 48 $E = \mathbb{K}[X]$

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & P & \mapsto & P' \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi: & L(E) & \to & L(E) \\ & g & \mapsto & f \circ g - g \circ f \end{array}$$

Valeurs propres de ϕ ?

TPE 49 Montrer que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Année 2007

TPE 50 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^3$. Montrer que c'est un ev et en trouver une base.

TPE 51

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ & 1 & \mapsto & 0 \\ & p \text{ premier} & \mapsto & 1 \end{array}$$

et telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \ \phi(x.y) = \phi(x) + \phi(y)$ *ceci est une modif de l'énoncé initialement erroné que je tente sans garantie de succès*

a. Calcul de $\phi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
b. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\phi(n) = n$

TPE 52 Soit E de dimension n et $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$.

a. On suppose que $\Pi_u = X^k Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $E = \ker u^k \bigoplus Imu^k$

b. Montrer que si $E = \ker u^k \bigoplus Imu^k$ alors u a un polynôme annulateur de valuation k

TPE 53

Soit $(G,\cdot)$ un groupe commutatif et soit $(a,b) \in G^2$. On suppose que a est d'ordre p et b d'ordre q et que $p \wedge q = 1$. Montrer que l'ordre de $a \cdot b$ est pq

TPE 54 Résoudre l'équation $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

TPE 55

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que A est inversible si et seulement si l'application $\phi : M \mapsto AM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
b. Soit $(E,\star)$ associatif de neutre e. Soit $a \in E$ et $f : x \mapsto a \star x$. On suppose que a est inversible. Que peut-on dire de f ?

TPE 56

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R}$. Montrer que

$$Tr(A) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} Tr(AU)$$

TPE 57 Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire des valeurs propres de $B = {}^t(comA)$?

Année 2006

TPE 58 Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$.

T est l'application définie sur E par $T(f) : x \mapsto (T(f))(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}$ dt

a. Montrer que T est un endomorphisme
b. Déterminer ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres.

TPE 59 E est un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \ \forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$ et soit $D = vect(u)$. On fixe $a \in \mathbb{R}^*$ et on définit $f_a(x) = x + a\langle x|u\rangle u$.

1. Montrer que $f(x) = x \Rightarrow f^*(x) = x$
2. Montrer que $E = \ker(f + Id_E) \oplus \ker(f - Id_E)$.
3. $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{N-1} f^k$

TPE 60 Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{N}$ tels que $a \wedge b = 50$ et $a \vee b = 600$

TPE 61 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}(n)$ telle que ${}^tA.A = U^{-1}A^tAU$

TPE 62 E evn de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle telle que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x|y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x)|f(y)\rangle = 0$$

a. Montrer qu'il existe $a > 0$ etl que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = a\|x\|$
b. Montrer que f est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

TPE 63 Soient deux formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 \text{ et } \beta(x,y) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Soit φ une forme bilinéair symétrique sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un automorphisme g de $\mathbb{R}^2$ tel que l'on ait l'une des trois propriétés suivantes:

P1
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(g(x),g(y)) = \alpha(x,y)$$

P2
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(g(x),g(y)) = -\alpha(x,y)$$

P3
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(g(x),g(y)) = \beta(x,y)$$

TPE 64 Que peut-on dire des valeurs propres réelles d'une matrice antisymétrique réelle?

TPE 65 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X^tXX = I_n$

TPE 66
$$A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} /\ \ x_{n+5} = x_{n+4} + 5x_{n+3} - x_{n+2} - 8x_{n+1} - 4x_n\}$$

Soit u l'endomorphisme de l'espace des suites tel que $u((y_n)_n) = (y_{n+1})_n$.

a. Montrer que $A = \ker(u - id)^3 \oplus \ker(u - 2Id)^2$.
b. En déduire une expression simple des éléments de A

TPE 67 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a priori pas distinctes. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$$

TPE 68 Soit A symétrique réelle. Montrer que $A + iI_n$ est inversible.

TPE 69 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

a. On suppose que toutes les valeurs propres de M sont simples. Combien de solutions l'équation $Z^2 = M$ a-t-elle?

b. Donner un exemple de matrice M telle que léquation ait une infinité de solutions.

c.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que l'équation n'a aucune solution.

TPE 70

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 3$ telles que $A = {}^t(comA)$

TPE 71 Soit E euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases orthonormées de E. et $u_i n \mathcal{L}(E)$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i) | f_j | \rangle$

TPE 72 $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication et $I_n \notin \mathcal{A}$.

a. Montrer que $M^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow M \in \mathcal{A}$

b. En déduire que $\forall i \in [1,n]$, $E_{i,i} \in \mathcal{A}$

c; En déduire une absurdité.

TPE 73

1. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que

$$Spec(A) \bigcap Spec(B) = \varnothing \Leftrightarrow \chi_A(B) \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$$

2. Soit $(A,B,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$, $P \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. On suppose que $PA = BP$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

TPE 74

$$f = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$$

Calculer $Tr(f)$

TPE 75 Déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$

TPE 76 Déterminer l'ensemble des matrices semblables à $diag(1,2,\dots,n)$ et qui commutent avec elle.

3.4 MINES

MINES 30 E est un espace euclidien de dimension n et p et q sont deux projecteurs orthogonaux non triviaux.

$p \circ q$ est-il diagonalisable?

MINES 31

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par M?

MINES 32 Dans $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ soit r une rotation vectorielle et s une réflexion. Que peut-on dire de $s \circ r \circ s$?

MINES 33

Déterminer tous les morphismes de groupe de S_n dans $(-1,1)$

MINES 34 Soit E un ev de dimension n et $H_1, {}_l dots, H_n$ des hyperplans de E tels que $\bigcap_{k=1}^{n} H_k = \{0_E\}$. Soit f un endomorphisme de E

1. Montrer que $\forall f \in [|1; n||],\ \ dim(\bigcap_{i=1}^{k}) H_i \geqslant n - k$
2. On suppose que $H_1, \ldots, H_n$ sont stables par f. Montrer que f est diagonalisable.
3. Etude de la réciproque de 2.

MINES 35 Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $w = (1, \ldots, 1)$

1. Matrice du projecteur orthogonal sur $vect(w)$. En donner le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, et les valeurs et vecteurs propres
2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que si $i \neq j,\ \ a_{i,j} = c$ et $a_{i,i} = b$. Exprimer A en fonction de la matrice précédente. En donner le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, et les valeurs et vecteurs propres

MINES 36

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $tr(A) = tr(A^2) = \ldots = tr(A^n) = 0$

MINES 37 Le juillet 2008 tombait un vendredi. Quel jour tombe le 11 juillet 2009?

MINES 38 Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall A \in G,\ \ A^2 = I_n$

1. Montrer que G est finie et a au plus 2^n éléments
2. Exo classique(centrale?) à transcrire

MINES 39 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\ker(A) = \ker(A^2)$

MINES 40

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})} & B \end{bmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. On suppose A et B diagonalisables de spectres disjoints. Montrer que M est diagonalisable
2. Etudier la réciproque

Anné 2007

MINES 41

E ev de dimension n, F sev de E.
$K = \{u \in \text{Ł}_{\mathbb{K}}(E)/F \subset \ker u\}$

a. Montrer que K est un ev
b. Dimension de K ?

MINES 42

Soit F une application non constante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F(AB) = F(A)F(B)$
Montrer que $F(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$

MINES 43

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

On suppose que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$
on pose $A = X.{}^tX$

a. Valeurs propres et vecteurs propres de A ?
b. Nature de u de matrice A dans une BON de $\mathbb{R}^n$?

MINES 44

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.
Montrer que le rang de A est pair

MINES 45

CNS sur α pour que la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

soit définie positive.

Année 2006

MINES 46

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $A^tAA = I_n$. Calculer e^A. A est-elle diagonalisable?

MINES 47 Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{12} = I_n$. Que peut-on dire de M^2?

MINES 48 Soit

$$E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})/ \ \ f \text{ est 1-périodique } \}$$

et soit

$$\begin{array}{rccc} \Delta & : & E & \to & E \\ & & f & \mapsto & f" \end{array}$$

1. Déterminer $\ker \Delta^2$
2. Si $g \in E$ montrer que
$$g \in Im(\Delta) \Leftrightarrow \int_0^1 g(t) \text{ dt } = 0$$
3. Montrer que $E = \ker \Delta \oplus Im(\Delta)$

MINES 49 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. montrer qu'il existe Q, unique tel que $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$ et $Q(0) = 0$

MINES 50

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, \ \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Est-ce un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$?

MINES 51

A désigne la matrice réelle antisymétrique telle que $\forall i < j, \ \ a_{i,j} = 1$

a. Quelle est la seule valeur propre réelle possible de A?
b. Déterminer les valeurs propres complexes de A
c. Que peut-on dire de A^3?

MINES 52 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $\ker(A)$ et $\ker(exp(A) - I_n)$

MINES 53

$$\begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{bmatrix}$$

a. A est-elle diagonalisable?
b. Calcul de $exp(A)$.

MINES 54 Recherche des plans et droites stables par un endomorphisme représenté par A matrice 3×3 avec 2 vp et pas diagonalisable.

MINES 55 Condition nécessaire et suffisante sur α pour que $q((x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha(\sum_{k=1}^{n} x_i)^2$ soit définie positive.

MINES 56 Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}| \leqslant n$

3.5 DIVERS

Divers 28

INT
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et
$f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad M \mapsto MA + AM$
Calculer la trace de f_A

Divers 29 Petites Mines

a. Trouver les suites vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} u_{n+3} & + & u_{n+2} & + & u_{n+1} & u_n & = & 0 & & & \\ u_0 & = & 1 & & u_1 & = & 2 & & u_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

b. Trouver les matrices A vérifiant $A^tAA = I_n$

Divers 30

ENSTIM

$$A = \begin{bmatrix} O & O & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

1. Calculer $\ker(A)$
2. Calculer le polynôme caractéristique de A
3. A est-elle diagonalisable?

Divers 31

INT
Trouver les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par u de matrice
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Divers 32

St Cyr
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$$

Montrer que n est pair et que $tr(A)$ est un entier négatif.

Divers 33

INT

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & (0) & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer χ_M et Π_M

Année 2007

Divers 34

INT

$(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$

Montrer que $det(A+B) \geq det(A) + det(B)$

Divers 35

INT

$(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$

Montrer que $det(A+B) \geq det(A) + det(B)$

Divers 36 NAVALE

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ avec $rg(A) = rg(B) = 1$

Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $Tr(A) = Tr(B)$

Divers 37

INT

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall O \in O(n),\ \ AO = OA$

a. Montrer que A commute avec toutes les matrices de projecteurs

b. Montrer que A commute avec toutes les matrices symétriques

Divers 38

IIE

Soient A,B,C et D quatre points quelconques de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Divers 39

IIE

a. $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe Ω orthigonale et T triangulaire telles que $A = \Omega T$ et montrer l'unicité

b. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Montrer que

$$|detA| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|$$

avec $\|C_i\|$ la norme euclidienne du i-ème vecteur colonne de A

Divers 40 NAVALE

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ tels que (A,b) libre. Etudier la diagonalisation de $A^tB + B^tA$

Divers 41 NAVALE

E euclidien et $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $u \circ u^* = u - u^*$

Que peut-on dire de u?

Divers 42 AIR

E de dimension finie. $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Montrer qu'il esiste $p \in \mathbb{N}$ tel que $E = \ker f^p \bigoplus Im f^p$

Divers 43 INT

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$

a. Montrre que P' est scindé sur $\mathbb{R}$
b. Montrer que $Q = P + P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Divers 44 INT Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

Divers 45 ENSEA

E de dimension n et f nilpotent d'ordre n.

a. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $(e,f(e),\ldots,f^{n-1}(e))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base
b. Montrer que $\forall p \in \{0,1,\ldots,n\},\ \ dim(\ker(f^p)) = p$

Divers 46 ENSEA

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} 1 - \theta\cos(\frac{2}{\theta}) & -\theta\sin(\frac{2}{\theta}) \\ -\theta\sin(\frac{2}{\theta}) & 1 + \theta\cos(\frac{2}{\theta}) \end{bmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de $M(\theta)$ et une base de vecteurs propres.

Divers 47 ENSEA

Calculer $\inf_{a,b} \int_{\mathbb{R}^*} e^{-t}(t - (at+2)(bt-1))^2 dt$

Divers 48

ST CYR

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

a. Calculer M^2 en fonction de M et I_3. en déduire que M est diagonalisable

b. Calcul des vp et diagonalisation

Divers 49 ST CYR

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Trouver V_1 tel que $AV_1 = -V_1$ $AV_2 = V_1 - V_2$ $AV_3 = V_3 - V_1$
b. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$
c. Calculer $exp(xA$

Année 2006

Divers 50

INT TELECOM

Déterminer l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $X^3 + X = 0$.

Divers 51

INT TELECOM Soit E un espace vectoriel de dimension finie . Soient$u$ et v deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent.

a. Montrer que $u + v$ est bijectif si et seulement si u est bijectif.
b. Montrer que $det(u + v) = det(u)$

Divers 52

INT TELECOM

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ det(A+M) = det(A)+det(M)$

Divers 53

INT TELECOM

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \ P(a) > 0 \Leftrightarrow \exists (S,T) \in \mathbb{R}[X]^2 /\ \ P = S^2 + T^2, \text{ avec } S\text{et } T \text{ sans racine commune}$$

4 GÉOMÉTRIE

4.1 CCP

CCP 105 Etude et tracé de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(u) & = & \frac{u^2-1}{u} \\ y(u) & = & \frac{u^2+1}{u+1} \end{array} \right.$$

1- Allure de la courbe?

2- Méthode pour trouver les asymptotes et la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

CCP 106 Etude, tracé de

$$\rho(\theta) = \sin(\theta) - 2\cos(\theta)$$

Année 2007

CCP 107

$$\rho(\theta) = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$$

a. Symétries de la courbe

b. Allure

c. Etude de la tangente en $\frac{\pi}{4}$

Année 2006

CCP 108 *12 points*

Dans le plan affine euclidien muni d'un rep'ere orthonormé d'origine O on considère l'ellipse

$$\mathcal{E} : \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \sqrt{5}\cos t \\ y(t) & = & \sin t \end{array} \right.$$

Soit $M \in \mathcal{E}$ et A le centre du cercle tangent à l'ellipse en M et passant par O. Donner les équations paramétriques de la courbe décrite par A lorsque M décrit $\mathcal{E}$. (lieu de A)

CCP 109

12 points

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) & = & \sin t.\cos t \end{array} \right.$$

CCP 110 Etude et tracé de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(u) & = & \frac{u-1}{u} \\ y(u) & = & \frac{u^2}{u+1} \end{array} \right.$$

CCP 111 Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, soit la courbe d'équation $x^2 + 4x - 4y^2 + 8y - 4 = 0$

1. Tracer la courbe placer foyers et asymptotes
2. Equation de la tangente aux points d'intersection avec l'axe des x.

CCP 112 Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, soit la courbe d'équation $x^2 + +3y^2 - 6y + 4x - 2 = 0$

1. Représenter cette courbe
2. Pente de la tangente à la courbe en les points où elle coupe l'axe des y.

CCP 113

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, soit la courbe d'équation $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

1. Tracer la courbe.
2. Equation de la tangente aux points d'intersection avec l'axe des y.

4.2 CENTRALE

CENTRALE 76

$$x(t) = \frac{t-1}{t^2-4} \quad y(t) = \frac{t^2-3}{t+2}$$

1- Conditions sur r,s et t pour que $M(r)$,$M(s)$ et $M(t)$ soient alignés.

2- Points doubles de la courbe?

3- Equation de la tangente en $M(1)$

CENTRALE 77

Soit $\mathcal{E}$ ellipse de foyers F_1 et F_2. On note H_1 et H_2 les projetés orthogonaux de F_1 resp F_2 sur la tangente en un point courant M de l'ellipse.

Calculer les coordonnés de H_1 et H_2 en utilisant Maple. (sans doute une question manquante sur le lieu de ces points).

Tracer dans le cas $a = 2$ et $b = 1$

Année 2007

CENTRALE 78

Tracé de $\rho = (\cos(4\theta) + 1)$

CENTRALE 79

Soit C_1 le cercle de centre $(a,0)$ et de rayon a et C_2 le cercle de centre $(-b,0)$ et de rayon b. Soient $M_1 \in C_1$ et $M_2 \in C_2$. Déterminer ces points de façon que l'aire deOM_1M_2 soit maximale

CENTRALE 80

Soient A_1,A_2,...,A_n n points distincts de $\mathbb{R}^2$ d'affixes respectifs $a_1, \ldots, a_n$.

Soit Σ l'ensemble des points M tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = \overrightarrow{0}$$

Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$

a. Montrer que $M \in \Sigma$ si et seulement si $\frac{P'(z)}{P(z)} = 0$ (avec z affixe de M)

b. Montrer que si $card(\Sigma) = n - 1$ l'isobarycentre de Σ est le même que celui de $(A_1, \ldots, A_n)$

c. Si $card(\Sigma) = n-1$ soient $B_1, \ldots, B8n$ npoints tels que l'ensemble des points M tels que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = \overrightarrow{0}$ soit égal à 'ensemble des points M tels que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MB_i}}{MB_i^2} = \overrightarrow{0}$
Montrer que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ sont deux ensembles égaux ou bien disjoints.

CENTRALE 81 Soit (C) d'équation $y = x^3 - x^2 + x + 1$. Montrer que les droites qui coupent (C) en trois points tels que l'un soit le milieu des deux autres passent par un point fixe.

CENTRALE 82 On considère le lieu des points

$$M(t) = (\frac{2\cos t}{2 - \sin(2t)}, \frac{2\sin^2 t}{2 - \sin(2t)})$$

a. Equation cartésienne, tracé, point double A
b. On suppose que $M(s)$ et $M(t)$ sont deux points de la courbe alignés avec O. Equation du cercle passant par $M(s)$, $M(t)$ et A
c. Aire de la boucle (entre cercle et courbe j'imagine)

Année 2006

CENTRALE 83 Exercice sur la cocyclicité à revoir

CENTRALE 84 Réduire et donner la nature de $xy + xz + yz = 1$

4.3 TPE

TPE 77
Lieu du centre de courbure de la conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Année 2007

TPE 78 Etude des courbes paramétrées d'équations $\rho(\theta) = 2\sqrt{7}\cos(\theta - \alpha)$ et $\rho(\theta) = \frac{4}{\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta}$

TPE 79 Déterminer les courbes planes dont le rayon de courbure est constant.

4.4 MINES

MINES 57 Reconnaître selon les valeurs de m

$$x^2 + 2y^2 + (m^2+1)z^2 + 2xy - 2yz + 2x - 4y + 4 + m^2 = 0$$

Année 2007

MINES 58 *Petit exercice posé à la fin d'une planche*

Soit un cercle C et une droite D qui est un diamètre de C Soit un point A qui n'est pas sur le cercle. Placer le projeté orthogonal de A sur D en utilisant seulement une règle infinie.

4.5 Divers

Divers 54

INT

Soient la surface $z^3 = axy$ et la droite $D : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2a \\ z & = & 3y - x \end{array} \right.$ Trouver l'équation des plans tangents à la surface qui contiennet la droite D

Année 2007

Divers 55

ST CYR

Calcul de l'aire délimitée par une ellipse en utilisant la formule de Green-Riemann

5 QUESTIONS DE COURS

ANALYSE

Propriétés des suites monotones. Théorème des segments emboîtés.
Enoncé et démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.
Enoncé et démonstration du théorème de Césaro.
Fonction réciproque de sinus hyperbolique; son expression en logarithme.
Théorème des séries alternées: énoncé et démonstration.
Montrer que si deux séries positives ont leurs termes équivalents alors elles ont même nature.
Constante d'Euler.
Trouver une série numérique de terme général o(1/n) et qui diverge.
Montrer que si une série de complexes converge absolument alors elle converge.
Types de convergences pour les suites de fonctions.
Ecriture avec les ε.
Types de convergences pour les séries de fonctions. Montrer CVN $\Rightarrow$ CVU.
Inégalités et égalités de Taylor.
Produit de Cauchy de deux séries numériques.
Définition et caractérisation des difféomorphismes de classe C^k. Lemme D'Abel: énoncé et démonstration.
Définition du rayon de convergence d'une série entière.
Description des solutions d'un système différentiel: justification.
Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles.
Une limite uniforme d'une suite d'applications continues est continue.
Intégrales à paramètres (théorème de continuité)
Définition des coefficients de Fourier et énoncés des théorèmes de Dirichlet.
Définition d'un ouvert, d'un fermé. Propriétés relatives à leur $\bigcap$ et leur $\bigcup$.
Lien entre compact et fermé/borné.
L'image continue d'un compact est un compact.
Un evn de dim finie est complet.
La boule unité d'un evn de dim finie est convexe et compacte. (démos)
Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique.
Méthodes de calcul de π

ALGÈBRE

Définition d'un anneau. Caractérisation des sous-anneaux. Des idéaux
Formule du binôme: énoncé et démonstration.
Ordre d'un élément dans un groupe cyclique.
Qu'est-ce que la signature d'une permutation?
Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles.
Le polynôme minimal d'un endomorphisme est-il toujours irréductible?
Interpolateur de Lagrange
Décomposition en éléments simples.
Méthodes de résolution de systèmes linéaires
CNS diagonalisabilité
Démonstration de Cayley-Hamilton dans le cas diagonalisable. Dans le cas trigonalisable.
Démonstration de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité
Isométries. Matrices orthogonales.
Endomorphismes autoadjoints.
Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.
Théorème de D'Alembert.

GEOMÉTRIE

Expression du rayon de courbure en coordonnées paramétriques avec démonstration.
Plan tangent d'une nappe paramétrée.

Analyse